

Corrigé Exercice 1

1. Le nombre de codons différents est égal au nombre de 3-uplets d'un ensemble de 4 éléments. Il y en a $4^3 = 64$.

2. Le nombre de séquences différentes d'ADN de trois codons est égal au nombre de 9-uplets d'un ensemble de 4 éléments. Il y en a $4^9 = 262\,144$.

3. a.

```
def code(n):  
    k = 0  
    while 4**k < n:  
        k = k + 1  
    return k
```

b.

```
>>> code(10**15)  
25  
>>>
```

Corrigé Exercice 2

1. $100 \times 99 = 9\,900$.

2. L'urne contient 50 jetons pairs et 50 jetons impairs. Pour tirer deux jetons pairs, il faut tirer un premier jeton pair parmi les 50 présents dans l'urne et un deuxième parmi les 49 restants. Ainsi la probabilité de tirer deux numéros pairs est $\frac{50 \times 49}{9\,900} = \frac{49}{198}$.

3. La somme des numéros est paire si on tire deux jetons pairs ou deux jetons impairs, ainsi $P(A) = \frac{50 \times 49 + 50 \times 49}{9\,900} \approx 0,4949$.

La somme des numéros est impaire si on tire un jeton pair suivi d'un jeton impair ou si on tire un jeton impair suivi d'un jeton pair, ainsi $P(B) = \frac{50 \times 50 + 50 \times 50}{9\,900} \approx 0,5051$.

L'évènement B est donc le plus probable.

Corrigé Exercice 3

1. À gauche, il y a $(23 \times 23 - 1)$ couples de lettres autorisés, au centre chacun des trois chiffres est à choisir parmi 10 (de 0 à 9) et à droite il y a $(23 \times 23 - 2)$ couples de lettres autorisés. Il y a donc $(23 \times 23 - 1) \times 10^3 \times (23 \times 23 - 2) = 278\,256\,000$ plaques différentes que l'on peut attribuer.

2. Chacune des lettres M, A, T et H peut se trouver sur une des quatre places réservées aux lettres ; pour compter le nombre de configurations différentes il faut compter le nombre de permutations des lettres du mot MATH, soit $4! = 24$. Il y a donc $24 \times 10^3 = 24\,000$ plaques contenant chacune des lettres du mot MATH exactement une fois.

3. Les couples SS et WW étant interdits à droite, il n'existe que $(23 \times 23 - 2)$ couples de lettres pouvant former un palindrome. Ces couples doivent être associés à trois chiffres formant eux-mêmes un palindrome. Or, entre 000 et 999 il y a 100 palindromes. Finalement, il y a $(23 \times 23 - 2) \times 100 = 52\,700$ plaques d'immatriculation qui sont des palindromes.

Corrigé Exercice 4

1. Il y a $\binom{9}{3}$ manières de remplir 3 cases parmi 3×3 cases.

Il y a 3 manières de remplir 3 cases alignées horizontalement.

Il y a 3 manières de remplir 3 cases alignées verticalement.

Il y a 2 manières de remplir 3 cases alignées en diagonale.

Il y a équiprobabilité donc : $P(H) = P(V) = \frac{3}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{28}$ et

$$P(D) = \frac{2}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{42}.$$

$$P(\bar{N}) = \frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{42} = \frac{2}{21} \text{ et } P(N) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}.$$

2.

X	20	α	-2
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{19}{21}$

$$E(X) = 20 \times \frac{1}{14} + \alpha \times \frac{1}{42} - 2 \times \frac{19}{21} = \frac{\alpha - 16}{42}.$$

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 16.$$

3. a.

Pour remplir trois cases, sachant que la machine M_1 est déréglée : la machine M_1 a 4 possibilités, M_2 a alors 8 possibilités et M_3 a 7 possibilités.

Pour remplir trois cases horizontalement : la machine M_1 a 4 possibilités, M_2 a alors 2 possibilités et M_3 n'a qu'une possibilité.

Pour remplir trois cases verticalement : la situation est symétrique, c'est la même chose.

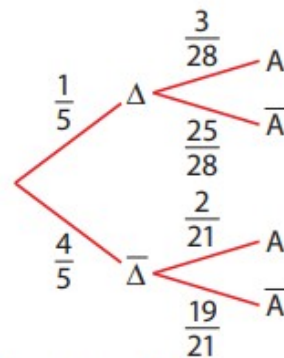
$$\text{On a donc } P_{\Delta}(H) = P_{\Delta}(V) = \frac{4 \times 2}{4 \times 8 \times 7} = \frac{1}{28}.$$

Pour remplir trois cases en diagonale : la machine M_1 a 4 possibilités de placer le jeton dans un coin, la machine M_2 a alors 2 possibilités de placer le 2^e jeton et la machine M_3 n'a alors qu'une possibilité de placer son jeton.

$$P_{\Delta}(D) = \frac{4 \times 2}{4 \times 8 \times 7} = \frac{1}{28}.$$

$$\text{b. } P_{\Delta}(N) = \frac{1}{28} \times 3 = \frac{3}{28}.$$

4. a.



$$\text{b. } P(A) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{28} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{21} = \frac{41}{420}.$$

$$5. P_A(\Delta) = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{3}{28}}{\frac{41}{420}} = \frac{9}{41}.$$

Corrigé Exercice 5

1. Le nombre de triangles distincts correspond au nombre de parties à trois éléments d'un ensemble à seize éléments,

soit $\binom{16}{3} = 560$.

2. a. Pour chaque point, il existe sept triangles isocèles en ce point. Il y a donc $7 \times 16 = 112$ triangles isocèles.

b. Chaque angle inscrit joignant deux points consécutifs mesure $\frac{\pi}{16}$. Les angles d'un triangle équilatéral mesurent $\frac{\pi}{3}$ chacun. Pour obtenir un triangle équilatéral, il faut choisir deux points séparés de $\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{16}} = \frac{16}{3}$ arcs de cercles. Or $\frac{16}{3}$ n'est pas entier, il n'est donc pas possible de construire de triangles équilatéraux.

c. En joignant deux points du cercle diamétralement opposés, on forme l'hypoténuse de 14 triangles rectangles. Il y a 8 couples de points diamétralement opposés, il y a donc 112 triangles rectangles.

d. Pour chaque couple de points du cercle diamétralement opposés, il y a deux points équidistants de ces deux points, soit deux triangles rectangles par couple de points diamétralement opposés. Il y a donc $2 \times 8 = 16$ triangles rectangles et isocèles.